

# Подсчёты в графах

7 июля

1. В турнире на  $n$  вершинах степени исхода и захода  $i$ -ой вершины равны соответственно  $a_i$  и  $b_i$ .

(а) Посчитайте количество ациклических треугольников.

(б) Докажите, что  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ .

2. В университете учатся  $n$  студентов, каждый из которых записался на несколько спецкурсов. Спецкурс открывается, если на него записались хотя бы два человека. После открытия спецкурсов оказалось, что если какие-то два студента одновременно посещают курсы  $A$  и  $B$ , то на курсах  $A$  и  $B$  разное количество участников. Докажите, что количество открытых спецкурсов не превышает  $(n - 1)^2$ .

3. В стране  $3k + 1$  город, любые два из которых соединены дорогой. Все дороги делятся на 3 вида, причём из каждого города выходит по  $k$  дорог каждого вида. Назовём четвёрку городов хорошей, если в этой четвёрке есть ровно один город, все три дороги из которого в остальные города четвёрки имеют разные виды. Докажите, что количество хороших четвёрок чётно.

4. В отборе на Олимпиаду принимали участие  $a$  спортсменов, которых оценивали  $b$  ( $b$  нечётно) судей. Каждый судья про каждого участника сказал, прошёл тот отбор или нет. Пусть число  $k$  таково, что у любых двух судей совпало мнение не более, чем по  $k$  участникам. Докажите, что  $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ .

5. Группа студентов из 15 человек решала тест, состоящий из 15 вопросов. Каждый студент ответил правильно ровно на шесть из них. Докажите, что есть такая пара студентов, что хотя бы на три вопроса каждый из них ответил верно.

6. Дан турнир на  $n \geq 4$  вершинах. Через  $a_i$  и  $b_i$  обозначим исходящую и входящую степени  $i$ -ой вершины соответственно. Четвёрку вершин  $A, B, C$  и  $D$  назовём *плохой*, если  $A, B$  и  $C$  выиграли у  $D$ , а также друг у друга по циклу. Оказалось, что в графе нет плохих четвёрок. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^3 \geq 0.$$

7. В некоторой компании людей для любых двух человек имеется ровно один третий, кого они оба уважают. Уважение не обязательно симметрично. Докажите, что для любых двух человек имеется ровно один третий, который уважает их обоих.